

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET  
INFORMATIQUES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Licence

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Fondamentales  
Par

Chiboub nadjla

Sujet du mémoire

Etude spectrale des opérateurs compacts

Devant le jury composé de:

Promotion: 2010/201

---

# Notations générales

$C([a, b])$	Espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a, b]$ .
$\langle x, y \rangle$	Produit Scalaire de $x, y$ .
$H$	Espace de Hilbert.
$A$	Opérateur Linéaire.
$A^{-1}$	Inverse de l'opérateur $A$ .
$I$	Opérateur d'identité.
$A^*$	Adjoint de l'opérateur $A$ .
$L(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires de $E$ dans $F$ .
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateurs linéaires continus de $E$ dans $F$ .
$K(x, y)$	Noyau de l'intégrale.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de $A$ .
$R_\lambda(A)$	Résolvant de $A$ .
$\sigma(A)$	Spectre de $A$ .
$\sigma_p(A)$	Spectre Ponctuel (discret) de $A$ .
$\sigma_c(A)$	Spectre Continu de $A$ .
$\sigma_r(A)$	Spectre Résiduel de $A$ .
$\sigma_a(A)$	Spectre Approximatif de $A$ .
$r(A)$	Rayan Spectral de $A$ .
$f$	Terme libre dans l'équation intégral.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et Notions Fondamentales</b>	<b>3</b>
1.1 Espace vectoriels normés . . . . .	3
1.1.1 Généralités . . . . .	3
1.1.2 Espace de Hilbert . . . . .	4
1.2 Théorème de Gram-Shmith . . . . .	5
1.3 Notions sur les opérateurs . . . . .	6
1.3.1 Opérateurs bornés . . . . .	6
1.3.2 Opérateurs continus . . . . .	6
1.4 Opérateurs inversibles . . . . .	7
1.5 Opérateur adjoint, opérateur auto-adjoint . . . . .	8
<b>2 Les opérateurs compacts</b>	<b>12</b>
2.1 Définitions et propriétés . . . . .	13
2.1.1 Compacité et relative compacité . . . . .	13
2.1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli . . . . .	13
2.1.3 Définition d'un opérateur compact . . . . .	14
<b>3 Etude Spectrale D'un Opérateur Compact</b>	<b>18</b>
3.1 Spectre d'un opérateur linéaire . . . . .	19
3.1.1 Propriétés spectrales . . . . .	19
3.1.2 Décomposition en Spectre ponctuel, résiduel et continu . . . . .	22

3.1.3	Spectre approximatif . . . . .	25
3.1.4	Rayan Spectral . . . . .	25
3.1.5	Exemples . . . . .	27
3.1.6	Valeurs et espaces propres d'un opérateur auto-adjoint . . . . .	29
3.2	Spectre D'un Opérateur Compact . . . . .	32
3.2.1	Propriétés . . . . .	32
3.2.2	Théorème Principale de F.Riesz, 1918 . . . . .	37
3.2.3	Théorie de Fredholm . . . . .	38
3.2.4	Etude spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint . . . . .	40
3.2.5	Théorème spectral (opérateurs compacts auto-adjoints) . . . . .	42
	<b>Conclusion générale</b>	<b>44</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

# Introduction

A la différence des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie, pour lesquels il existe une description exhaustive, l'étude des opérateurs linéaires dans un espace de dimension infinie est un problème assez compliqué dont l'étendue est pratiquement impossible à imaginer. Cependant, certaines classes importantes de ces opérateurs peuvent être décrites de manière assez complète. L'une des plus importantes de ces classes est constitué par les opérateurs dits compacts. Ces opérateurs sont, d'un part, assez proches par leurs propriétés de ceux de dimension finie (c'est-à-dire des opérateurs bornés qui transforment un espace donné en un espace de dimension finie), et admettent une description assez détaillée; d'autre part, ils jouent avec la théorie spectrale un rôle important dans de nombreuses applications, et en premier lieu dans la théorie des équations intégrales.

La théorie spectrale des opérateurs sur l'espace de dimension infini est plus compliquée, plus intéressante et très importante pour la compréhension des opérateurs eux-mêmes.

Dans ce travail, nous allons étudier le Spectre des opérateurs compacts, en le divisant en trois chapitres, qui sont les suivantes:

Dans le premier chapitre, on a donné quelques définitions et notions fondamentales des espaces de Hilbert, Banach et les opérateurs linéaires continus et les propriétés d'opérateurs adjoints et auto-adjoints.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'opérateur compact, commençons par la définition et quelques propriétés d'ensemble compact, ensuite on donne les propriétés et définitions d'un opérateur compact.

Dans le troisième chapitre représente le but de ce mémoire, en divisant en deux parties. Dans la première partie on a commencé à donner quelques propriétés spectrales, comme j'ai mentionné la décomposition en spectre ponctuel, résiduel et continu, Rayan spectral,

valeurs et espaces propres d'un opérateur auto-adjoint et dans la deuxième partie on donne quelques propriétés de spectre d'un opérateur compact, comme je l'ai mentionné, théorème principale de **F.Riez**, **théorie de Fredholm**, spectre d'un opérateur compact auto-adjoint.

# Chapitre 1

## Rappels et Notions Fondamentales

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail.

### 1.1 Espace vectoriels normés

#### 1.1.1 Généralités

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle norme sur l'application

$$\|\cdot\| : x \in E \longmapsto \|x\| \in [0, +\infty[ ,$$

qui vérifie:

1.  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$ ,
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{k}$  et  $\forall x \in E$  on a,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
3.  $\forall x \in E$  et  $\forall y \in E$  on a,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ .

#### Proposition 1.1.1

*Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.*

**Définition 1.1.1 (Espace de Banach)**

*Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Cette définition prend tout son sens dans le cas de la dimension infinie.

En effet on a en dimension finie le résultat suivant

Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  sont des Banach.

**Définition 1.1.2 (Produit scalaire)**

*Soit  $E$  un espace vectoriel, on dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $x, y, z \in E$ ,*

1.  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ,
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
4.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
5.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .

**Définition 1.1.3 (Espace euclidien ou préhilbertien)**

*Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dite un espace préhilbertien ou espace euclidien, on peut lui introduire une norme définie par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**1.1.2 Espace de Hilbert**

*Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire complet pour la norme associé à ce produit scalaire.*



**Remarque 1.1.1**

- Soit  $E$  un espace préhilbertien, on dit que  $x, y \in E$ , sont orthogonaux si et seulement si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

- On dit qu'une suite de  $E$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  finie ou infinie,  $(e_n)_{n \geq 1}$  forme un système orthogonal si et seulement si

$$\forall n \neq m \quad \langle e_n, e_m \rangle = 0.$$

- Le système est orthonormé si de plus

$$\forall n, \|e_n\| = 1.$$

- Soit  $E$  un espace euclidien on a (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\forall x, y \in E : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Système Complet(total)**

Un système  $\{e_i\}$  est dit complet (ou total) si le plus petit sous espace fermé qui le contient coïncide avec l'espace  $E$  tout entier; autrement dit l'espace  $E$  est engendré par le système  $\{e_i\}$ , ou encore, l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments de  $\{e_i\}$  est dense dans  $E$ .

## 1.2 Théorème de Gram-Shmith

Soit  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  un système linéairement indépendant d'un espace euclidien  $E$ , alors il existe dans le même espace  $E$  un système orthonormé d'éléments  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$  tel que; on a

$$\psi_n = \alpha_{n1}\varphi_1 + \alpha_{n2}\varphi_2 + \dots + \alpha_{nn}\varphi_n \quad \forall n, \text{ avec } \alpha_{nn} \neq 0,$$

et

$$\varphi_n = \beta_{n1}\psi_1 + \beta_{n2}\psi_2 + \dots + \beta_{nn}\psi_n \quad \forall n, \text{ avec } \beta_{nn} \neq 0,$$

d'où

$$[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots] = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots].$$

## 1.3 Notions sur les opérateurs

### 1.3.1 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C$ , telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E.$$

Le plus petit des nombres  $C$  vérifiant cette inégalité s'appelle norme de l'opérateur  $A$  est noté  $\|A\|$ , on a :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

### 1.3.2 Opérateurs continus

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, un opérateur  $A$  définie sur un sous ensemble  $G \subset E$  dans  $F$  est dit continu au point  $x_0$  de  $G$  si, pour toute suite  $x_n$  de  $G$  converge vers  $x_0$ , la suite  $A(x_n)$  converge vers  $A(x_0)$  c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = A(x_0).$$

#### Théorème 1.3.1

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces normés et  $A: E \rightarrow F$  un opérateur linéaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1.  $A$  est continu,
2.  $A$  est continu en 0,
3.  $A$  est uniformément continu sur tout  $E$ ,
4.  $A$  est borné,
5. Il existe un voisinage  $V$  de 0 dans  $E$  tel que  $A(V)$  est borné dans  $F$ ,
6.  $\exists M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\|A(x)\| \leq M \|x\|$  pour tout  $x \in E$ .

**Théorème 1.3.2**

*Soit  $E$  et  $F$  deux espaces normés avec  $E$  de dimension finie. Alors tout opérateur linéaire  $E$  vers  $F$  est borné.*

**Remarque 1.3.1**

*Soit  $E$  et  $F$  deux espaces normés. L'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$  est notée  $\mathcal{L}(E, F)$ .*

*L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $L(E, F)$  l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur  $E$  dans  $F$ , de plus  $\mathcal{L}(E, F)$  muni de la norme  $\|A\|$  est un espace normé.*

**Théorème 1.3.3**

*Soient  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.*

## 1.4 Opérateurs inversibles

**Théorème 1.4.1**

*On dit qu'un opérateur linéaire continu  $A \in \mathcal{L}(E)$  est inversible si  $A$  est une bijection de  $E$  sur lui-même et  $A^{-1}$  est continu.*

**Théorème 1.4.2**

*Soit  $E$  un espace de Banach et  $A$  un opérateur linéaire borné sur  $E$  tel que  $\|A\| < 1$ ;  $I - A$  est inversible et borné et on a :*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

**Théorème 1.4.3**

*Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés,  $A$  un opérateur linéaire. On dit que l'opérateur  $A$  est un isomorphisme dans  $F$ , s'il est injectif, continu et si son inverse est continu sur image de  $A$ , si de plus,*

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E, \forall x \in E,$$

*on dit que  $A$  est un isomorphisme isométrique.*

## 1.5 Opérateur adjoint, opérateur auto-adjoint

### Théorème 1.5.1 (Théorème de représentation de Riesz)

Soit  $F$  une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors il existe un (unique) vecteur  $f \in H$  tel que, pour tout  $\varphi \in H$

$$F(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle.$$

### Proposition 1.5.1

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(H)$ , alors

$$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

### Définition 1.5.1 (Existence de l'opérateur adjoint)

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Alors il existe un unique opérateur  $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  tel que, pour tout  $x \in H_1$  et tout  $y \in H_2$ , on ait

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

On a, de plus  $\|A^*\| = \|A\|$ .

#### Preuve.

Pour tout  $y \in H_2$  l'application  $x \mapsto \langle Ax, y \rangle$  est linéaire et continu (de norme inférieure à  $\|A\| \|y\|$  d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz). D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément noté  $A^*(y)$  tel que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$$

On vérifie facilement que pour tous  $y, z \in H_2$  et  $\lambda$  scalaire,  $A^*(y) + \lambda A^*(z)$  vérifie la propriété qui définit  $A^*(y + \lambda z)$ . Par unicité,  $A^*(y) + \lambda A^*(z) = A^*(y + \lambda z)$ , ce qui prouve que  $A^*$  est linéaire.

Par définition de la norme d'opérateur et en utilisant la théorème d'Hahn-Banach, on a

$$\begin{aligned}
 \|A^*\| &= \sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1} \|A^*y\| \\
 &= \sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1, x \in H_1, \|x\| \leq 1} |\langle x, A^*y \rangle| \\
 &= \sup_{y \in H_2, \|y\| \leq 1, x \in H_1, \|x\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle| \\
 &= \sup_{x \in H_1, \|x\| \leq 1} \|Ax\| \\
 &= \|A\|.
 \end{aligned}$$

Ainsi  $A^*$  est continue et  $\|A^*\| = \|A\|$ . ■

### Définition 1.5.2

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . L'unique application linéaire  $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  telle que pour tout  $x \in H_1$  et tout  $y \in H_2$ , on ait

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,$$

est appelée l'adjoint de  $A$ .

### Proposition 1.5.2

Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert, l'application  $A \mapsto A^*$  est isométrique de  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  dans  $\mathcal{L}(H_2, H_1)$ ; elle est linéaire si les espaces sont réels et antilinéaire si les espaces sont complexes. De plus,  $\forall A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ ,  $(A^*)^* = A$  et  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ . Enfin  $(AB)^* = B^*A^*$ .

#### Preuve.

Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tout  $x \in H_1$  et tout  $y \in H_2$ ,  $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned}
 \langle x, (A_1 + \lambda A_2)^*(y) \rangle &= \langle (A_1 + \lambda A_2)(x), y \rangle \\
 &= \langle A_1(x), y \rangle + \lambda \langle A_2(x), y \rangle \\
 &= \langle x, (A_1^*)(y) \rangle + \langle x, \bar{\lambda} (A_2^*)(y) \rangle \\
 &= \langle x, (A_1^* + \bar{\lambda} A_2^*)(y) \rangle.
 \end{aligned}$$

Ainsi  $A \mapsto A^*$  est antilinéaire. Elle est isométrique d'après la définition 1.5.1.

Montrons que  $(A^*)^* = A$ . Pour cela on montre que pour tous  $x \in H_1$  et  $y \in H_2$ , on a  $\langle A(x), y \rangle = \langle (A^*)^*(x), y \rangle$ . On a

$$\begin{aligned} \langle A(x), y \rangle &= \langle x, A^*(y) \rangle \\ &= \overline{\langle A^*(y), x \rangle} \\ &= \overline{\langle y, (A^*)^*(x) \rangle} \\ &= \langle (A^*)^*(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Montrons que  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ . Tout d'abord on rappelle que la norme d'opérateur est une norme d'algèbre et donc, en particulier,  $\|A^*A\| \leq \|A\| \|A^*\| = \|A\|^2$ .

D'autre part, en utilisant encore une fois de plus la théorème d'Hahn-Banach et la définition de la norme d'opérateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \|A^*A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|A^*A(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle A^*A(x), y \rangle| \\ &\geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle A^*A(x), x \rangle| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle A(x), A(x) \rangle| \\ &= \|A\|^2. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ .

Enfin, pour vérifier que  $(AB)^* = B^*A^*$ , il suffit de montrer que pour tout  $x \in H_1$  et  $y \in H_2$  on a  $\langle (AB)^*(x), y \rangle = \langle A^*B^*(x), y \rangle$ . On a, par définition de l'adjoint,

$$\begin{aligned} \langle (AB)^*(x), y \rangle &= \langle x, (AB)(y) \rangle \\ &= \langle A^*(x), B(y) \rangle \\ &= \langle A^*B^*(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs  $x, y$ , on a l'égalité  $(AB)^* = B^*A^*$ . ■

### Définition 1.5.3

Soit  $H$  un espace de Hilbert, on dit que  $A \in \mathcal{L}(H)$  est auto-adjoint si  $A^* = A$ .

**Proposition 1.5.3**

*Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A \in \mathcal{L}(H)$ , alors*

$$A \text{ auto-adjoint} \Leftrightarrow \forall x \in H \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 1.5.1**

*Le produit de deux opérateurs auto-adjoints n'est pas en général un opérateur auto-adjoint.*

# Chapitre 2

## Les opérateurs compacts

Les opérateurs compacts ont été introduits par Hilbert lors de l'étude des opérateurs intégraux. Ils sont appelés opérateurs complètement continus parce qu'ils possèdent une propriété de continuité spécial. Les opérateurs compacts sont très importante, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert de dimension finie. Dans ce chapitre nous commençons d'abord par rappeler la définition d'ensemble compact. Ainsi on donne quelques propriétés et définition d'un opérateur compact. Pour plus de détails voir par exemple ([Nad, 04], [Sch, 79], [Bre, 84], ou bien [Fri, 10]).



## 2.1 Définitions et propriétés

### 2.1.1 Compacité et relative compacité

Soit  $E$  un espace topologique. Un sous-ensemble  $G$  est dit compact si pour tout recouvrement ouvert de  $G$  on peut extraire un recouvrement fini. Cela veut dire que, toute famille  $\{V_j, j \in J\}$  d'ensembles ouverts dont la réunion contient  $G$  admet une sous-famille finie :

$$\{V_{j(k)}, j(k) \in J, k = 1, 2, \dots, n\} \text{ dont la réunion contient } G.$$

#### Proposition 2.1.1

*Soit  $E$  un espace métrique. Un sous-ensemble  $G$  de  $E$  est compact si toute suite d'éléments de  $G$ , contient une sous-suite convergente vers un élément de  $G$ .*

#### Définition 2.1.1 (Ensemble relativement compact)

*Soient  $E$  un espace normé et  $G$  un sous-ensemble de  $E$ . On dit que  $G$  est relativement compact si son adhérence  $\overline{G}$  est compacte dans  $E$*

### 2.1.2 Théorème d'Arzela-Ascoli

Un ensemble  $G \subset C(K)$  est relativement compact si et seulement si il est borné et équicontinue c'est-à-dire

s'il existe une constante  $M$  telle que

$$|\varphi(x)| \leq M \text{ pour tout } x \in K \text{ et } \varphi \in G$$

Et pour tout  $\varepsilon$  positive, il existe  $\delta$  positive telle que

$$\forall \varphi \in G, |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in K \text{ avec } |x - y| < \delta$$

L'ensemble  $C(K)$  est désigné espace des fonctions réelles ou complexes définies dans un ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , muni de la norme

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

### 2.1.3 Définition d'un opérateur compact

Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact si pour tout ensemble  $G$  de  $E$ , l'image  $A(G)$  est relativement compact dans  $F$ .

$A(G)$  est relativement compact si  $\overline{A(G)}$  est compact  $\iff$  pour toute suite  $\{\varphi_n\}$  de  $G$ , il existe une sous-suite  $\{\varphi_{n_k}\}$  qui converge dans  $F$ .

#### Théorème 2.1.1

*Une combinaison linéaire  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

#### Théorème 2.1.2

*Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un des deux opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.*

**Preuve.**

- Soit  $\{\varphi_n\}$  une suite bornée de  $E$ , alors si l'opérateur  $B$  est un opérateur borné alors  $B\varphi_n(x)$  est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur  $A$  il existe une sous suite  $A(B\varphi_n(x))$  qui converge, ce qui implique que  $AB$  est compact.
- D'autre part si  $B$  est compact, on peut extraire de la suite  $B\varphi_n(x)$  une sous suite convergente  $B\varphi_{n_k}(x)$ , et de la continuité de l'opérateur  $A$  car il borné la suite  $A(B\varphi_{n_k}(x))$  converge, ce qui implique que  $AB$  est compact. ■

#### Théorème 2.1.3

*Soit  $E$  un espace normé et  $F$  espace de Banach, et soit  $\{A_n\}$  une suite d'opérateurs compacts de  $E$  dans  $F$ , convergente en norme vers l'opérateur linéaire  $A$  de  $E$  dans  $F$ , dire,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

*Alors  $A$  est compact.*

**Théorème 2.1.4 (Rang de dimension finie)**

Soit  $A$  un opérateur borné de  $E$  dans  $F$  à image  $A(E)$  de dimension finie. Alors  $A$  est compact.

**Preuve.**

En effet, pour tout ensemble  $G$  de  $E$  borné, l'image  $A(G)$  est un ensemble borné dans l'espace de dimension finie  $A(E)$ , alors  $A(G)$  est relativement compact qui implique que  $A$  est compact. ■

**Théorème 2.1.5 (Domaine de dimension finie)**

Soit  $A$  un opérateur borné de  $E$  dans  $F$  avec  $E$  est de dimension finie  $\dim E < \infty$ , Alors  $A$  est compact.

**Théorème 2.1.6**

L'opérateur identique  $I$  de  $E$  dans  $E$  est compact si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

**Preuve.**

Soit  $\varphi_1$  un élément de  $E$ , tel que  $\|\varphi_1\| = 1$ , alors  $G_1 = \text{span}\{\varphi_1\}$  est un sous espace fermé de  $E$  car  $G_1$  est de dimension finie. Il existe un élément  $\varphi_2 \in E$ , tel que  $\|\varphi_2\| = 1$  et  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}$  prenons une deuxième fois le sous espace fermé  $G_2 = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ , il existe alors un élément  $\varphi_3 \in E$  avec  $\|\varphi_3\| = 1$ ,  $\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$  et  $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$ , on répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite  $\{\varphi_n\}$  vérifiant  $\|\varphi_n\| = 1$  et  $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$  pour tout  $m \neq n$ .

On remarque que cette suite  $\{\varphi_n\}$  est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente. ■

**Corollaire 2.1.1**

La boule unité  $B(0, 1)$  dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème précédent, car la boule unité  $B(0, 1)$  est une propre image dans l'espace  $E$  de dimension infinie car l'opérateur identique.

Un opérateur compact est un opérateur borné la réciproque est fausse.

**Théorème 2.1.7**

*L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact*

$$A\varphi(x) = \int_G K(x, y) \varphi(y) dy, x, y \in G$$

**Preuve.**

Soit  $E$  un ensemble borné de  $C(G)$  alors, on a  $\|\varphi\| \leq M$  pour tout  $\varphi \in E$ . De plus,

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x, y \in G} |K(x, y)|, \forall x, y \in G, \varphi \in E,$$

ce la veut dire que  $A(E)$  est borné. L'opérateur  $K$  est uniformément continu sur le compact  $G \times G$ , d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G, |x - y| < \delta \Rightarrow |K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}.$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tous } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G \text{ avec } |x - y| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble  $A(E)$  est équicontinu, d'où  $A(E)$  est relativement compact d'après le théorème d'Arzela-Ascoli. Alors  $A$  est compact. ■

**Théorème 2.1.8**

*Soit  $A$  un opérateur compact de  $E$ , l'inverse  $A^{-1}$  de  $A$  n'est pas borné si l'espace  $E$  est de dimension infinie.*

**Preuve.**

Si  $A^{-1}$  est borné alors  $AA^{-1}$  est compact (le produit d'un compact et un borné).

Et puisque  $AA^{-1} = I$ , cela veut dire que  $I$  est compact dans un espace de dimension infinie. (contradiction  $I$  n'est pas compact dans espace de dimension infinie) ■

**Théorème 2.1.9**

*Soit  $A$  un opérateur compact dans  $\mathcal{L}(H)$ ,*

*Soient  $(\varphi_n)$  une suite orthonormée, et  $(\psi_n)$  une suite bornée dans  $H$ , alors*

$$\langle A\psi_n, \varphi_n \rangle \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Plus généralement, si  $(\varphi_n)$  une suite bornée telle que,

$$\forall \varphi \in H, \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \varphi_n, \varphi \rangle = 0,$$

Et  $(\psi_n)$  une suite bornée, alors

$$\langle A\psi_n, \varphi_n \rangle \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

### Théorème 2.1.10

Soit  $A$  un opérateur linéaire compact, défini sur un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hilbert  $H_2$  alors, l'opérateur adjoint  $A^*$  défini de  $H_2$  dans  $H_1$  est aussi un opérateur compact.

**Preuve.**

Soit  $\psi_n$  une suite bornée de  $H_2$  alors, il existe une constante positive  $M$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\|\psi_n\| < M$ , l'opérateur  $A$  étant compact de  $H_1$  dans  $H_2$  et l'opérateur  $A^*$  est borné de  $H_2$  dans  $H_1$  alors, l'opérateur produit  $AA^*$  défini de  $H_2$  dans  $H_2$  est un opérateur compact comme produit de deux opérateurs l'un compact et l'autre borné. D'où l'existence d'une sous suite  $\psi_{n_k}$  de  $\psi_n$  telle que la suite  $AA^*(\psi_{n_k})$  soit convergente dans  $H_2$

$$\begin{aligned} \left\| A^*\psi_{n_p} - A^*\psi_{n_q} \right\|^2 &= \left\| A^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}) \right\|^2 \\ &= \langle A^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}), A^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}) \rangle \\ &= \langle AA^*(\psi_{n_p} - \psi_{n_q}), \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \rangle \\ &= \langle AA^*\psi_{n_p} - AA^*\psi_{n_q}, \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \rangle \\ &\leq \left\| AA^*\psi_{n_p} - AA^*\psi_{n_q} \right\| \left\| \psi_{n_p} - \psi_{n_q} \right\| \\ &\leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite  $A^*\psi_{n_k}$  est de Cauchy dans un espace de Hilbert.

D'où la convergence de cette suite  $H_1$ . ■

# Chapitre 3

## Etude Spectrale D'un Opérateur Compact

La notion de spectre a déjà été rencontrée à propos des matrices. Etant donné  $A \in M_n(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}_n)$ , le spectre de  $A$  est l'ensemble des valeurs propres de  $A$ , i.e. l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $\det(A - \lambda I) = 0$ , ce qui signifie  $A - \lambda I$  que n'est pas un isomorphisme, de  $\mathbb{C}_n$ . On va définir de façon tout-à-fait analogue le spectre d'un opérateur borné sur un espace de Hilbert, mais en dimension infinie on va voir qu'on peut distinguer plusieurs types d'éléments du spectre et que les valeurs propres ne sont pas les seuls types de valeurs spectrales.

Dans ce chapitre, vous en apprendrez plus sur le spectre et de ses propriétés et types, en particulier dans la dimension infinie, Pour plus de détails voir par exemple [Bre, 92], [Che, 01], [Boc, 84] ou bien [Sch, 97].

## 3.1 Spectre d'un opérateur linéaire

### 3.1.1 Propriétés spectrales

On sait que les valeurs propres jouent un rôle important dans l'étude des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie. En dimension infinie la notion de spectre d'un opérateur autre chose que des valeurs propres.

Le point de départ est la définition suivante.

#### Définition 3.1.1

Soit  $E$  un espace de Banach.  $A \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur linéaire continu, on dit  $\lambda \in \mathbb{C}$  appartient à l'ensemble résolvant de  $A$ , si  $A - \lambda I$  est isomorphisme de  $E$  c'est-à-dire  $A - \lambda I$  est une bijection de  $E$  dans  $E$  et que  $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ .

L'ensemble résolvant de  $A$  est noté  $\rho(A)$ , l'opérateur  $(A - \lambda I)^{-1}$  est appelé la résolvante de  $A$  en  $\lambda$  et noté  $R_\lambda(A)$

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ est bijectif de } E \text{ sur } E\}.$$

Où:  $\lambda$  est un nombre complexe quelconque et  $I$  l'opérateur identité

$$\lambda \in \rho(A) \implies \left\{ \begin{array}{l} 1 : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe} \\ 2 : (A - \lambda I)^{-1} \text{ est borné (continu)} \end{array} \right\}$$

Donc pour montrer que  $\lambda \in \rho(A)$ , il faut montrer que  $(A - \lambda I)^{-1}$  existe, ce qu'on fera en général en le calculant (calcul algébrique) puis il faut montrer  $(A - \lambda I)^{-1} : E \rightarrow E$  est borné (partie Analyse).

#### Remarque 3.1.1

On rappelle le théorème des isomorphismes de Banach: étant donnés deux espaces de Banach  $E$  et  $F$  et  $f$  application linéaire continue bijective de  $E$  dans  $F$ , alors  $f^{-1}$  est continue. On voit en particulier que  $\lambda \in \rho(A)$ , la continuité de  $(A - \lambda I)^{-1}$  est automatique.

#### Remarque 3.1.2

Si  $\lambda \in \rho(A)$  alors  $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ .

### Définition 3.1.2

On appelle valeur spectrale de  $A$  tout élément  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $(A - \lambda I)$  n'est pas isomorphisme de  $E$ , par la remarque ci-dessus, ceci équivaut à définir  $\sigma(A)$  comme l'ensemble des valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $A - \lambda I$  n'est pas bijective

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

alors,  $\lambda \in \sigma(A)$  lorsque  $(A - \lambda I)^{-1}$  n'existe pas dans  $\mathcal{L}(E)$  i.e. Soit  $(A - \lambda I)^{-1}$  n'est pas un opérateur de  $E$  dans  $E$ , Soit  $(A - \lambda I)^{-1}$  est un opérateur de  $E$  mais n'est pas borné (n'est pas continu).

On appelle valeur propre de  $A$  tout éléments  $\lambda \in \mathbb{C}$  telle que  $(A - \lambda I)$  ne soit injectif c'est-à-dire  $\ker(A - \lambda I) = N(A - \lambda I) \neq \{0\}$ .

### Théorème 3.1.1

Soit  $A$  un opérateur linéaire défini dans un espace de Hilbert  $H$  alors,

1. Son ensemble résolvant  $\rho(A)$  est ouvert.
2. La fonction  $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$  est analytique pour tout  $\lambda$  appartient à  $\rho(A)$ .
3. Son spectre  $\sigma(A)$  est fermé et non vide.

#### Preuve.

1) Si  $\lambda_0$  appartient à  $\rho(A)$ , l'opérateur résolvant  $R_{\lambda_0}(A)$  existe est borné et à domaine dense. Pour établir que  $\rho(A)$  est ouvert, il suffit de montre que quelque soit  $\lambda_0$  appartenant  $\rho(A)$ , Il existe un disque de rayon  $r$  centré en  $\lambda_0$  et tel que, pour tout  $\lambda$  appartenant à ce disque l'opérateur résolvant  $R_\lambda(A)$  existe, soit borné et à domaine dense.

En effet, si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(A)$$



converge elle définit en vertu du théorème 1.4.2, un opérateur borné dont le domaine coïncide avec celui de  $R_{\lambda_0}(A)$  et qui par conséquent est dense, or cette série converge si

$$|\lambda - \lambda_0| < R = \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1},$$

et dans ce cas sa somme est égale à :

$$[I - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1} R_{\lambda_0}(A)$$

qui n'est autre que  $R_\lambda(A)$  car :

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= (A - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0) I \\ &= (I - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(A)) (A - \lambda_0 I) \end{aligned}$$

2) La formule

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(A),$$

montre que la fonction  $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$ , définie pour tout  $\lambda \in \rho(A)$  et à valeurs dans l'algèbre de Banach  $B(E)$  des opérateurs linéaires bornés dans  $E$ , est analytique et qu'en particulier la dérivée de cette fonction au point  $\lambda_0$  est égale à  $R_\lambda^2(A)$ .

Ce résultat aurait pu, aussi, être obtenu comme conséquence de la relation de Hilbert :

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A),$$

qui est valable quels que soient  $\lambda$  et  $\mu$  appartenant à  $\rho(A)$ , car cette relation implique, en effet, que la limite

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{R_{\lambda_0 + \Delta\lambda} - R_{\lambda_0}}{\Delta\lambda},$$

qui est par définition, la dérivée de la fonction  $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$  au point  $\lambda_0$ , est égale à  $R_\lambda^2(A)$ .

La relation de Hilbert, qui établit facilement, en remarquant que :

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = R_\lambda(A) (A - \mu I) R_\mu(A) - R_\lambda(A) (A - \lambda I) R_\mu(A)$$

montre, en outre,  $R_\lambda(A)$  et  $R_\mu(A)$  commutent.

3)  $\sigma(A)$  est fermé puis c'est par définition le complémentaire de  $\rho(A)$  qui est ouvert.

$\sigma(A)$  n'est pas vide car la fonction  $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$  serait analytique dans tout le plan complexe.

■

### 3.1.2 Décomposition en Spectre ponctuel, résiduel et continu

Soit  $E$  un espace de Banach et  $A \in \mathcal{L}(E)$ , on définit les trois sous ensembles de spectre de  $A$  comme suit:

#### Spectre Ponctuel où Discret :

L'ensemble des valeurs propres de  $A$  constitue des  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $A - \lambda I$  n'est pas injectif,  $(A - \lambda I)^{-1}$  n'existe pas:

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \neq 0, Ax = \lambda x\}\end{aligned}$$

et si  $\lambda \in \sigma_p(A)$  alors  $\lambda$  est appelé valeur propre, et un vecteur  $x$  non nul de l'espace associé  $\ker(A - \lambda I) = E_\lambda = \{x \in E; (A - \lambda I)x = 0\}$  est appelé vecteur propre (ou fonction propre). Donc  $\lambda \in \sigma_p(A)$  si et seulement si  $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$ .

#### Théorème 3.1.2

Soit  $A$  un opérateur linéaire et soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ . Alors

$$E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}.$$

#### Preuve.

Pour  $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$ , nous avons  $Ax = \lambda_1 x$  et  $Ax = \lambda_2 x$ ; ce qui entraîne  $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$  et puisque  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ , on a  $x = 0$ . ■

#### Théorème 3.1.3

Soit  $A$  un opérateur linéaire et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma_p(A)$  mutuellement différents, i.e.  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$ . Soient  $x_k \in E_{\lambda_k}, x_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ . Alors les vecteurs propres  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement indépendants.

#### Preuve.

Nous procédons par récursions. Si  $n = 1, x_1 \neq 0$  est linéairement indépendant. Supposons l'affirmation vraie pour  $n = k$  et montrons qu'elle reste vraie pour  $n = k + 1$ .

Soit donc

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j = 0. \tag{3.1.1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda_{k+1}I) \left( \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j \right) &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j A x_j - \lambda_{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j \\
 &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) x_j \\
 &= \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) x_j = 0.
 \end{aligned}$$

Mais  $x_1, \dots, x_n$  sont linéairement indépendants, donc  $\alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$  et puisque  $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$ ,  $j = 1, \dots, k$  on a  $\alpha_j = 0$   $j = 1, \dots, k$ .

La relation 3.1.1 nous donne  $\alpha_{k+1} = 0$ . ■

### Spectre Continu

Constitue des  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $A - \lambda I$  est injectif sans être surjectif, mais avec image dense dans  $E$ :

$$\lambda \in \sigma_c(A) \iff \ker(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } R(A - \lambda I) \neq E, \overline{R(A - \lambda I)} = E$$

$$\sigma_c(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C}, R(A - \lambda I) \neq E, (A - \lambda I)^{-1} \text{ et non borné} \}$$

### Spectre Résiduel

Constitue  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tel que  $(A - \lambda I)$  est injectif sans être surjectif et dont l'espace image n'est pas dense dans  $E$

$$\lambda \in \sigma_r(A) \iff \ker(A - \lambda I) = \{0\}, R(A - \lambda I) \neq E, \overline{R(A - \lambda I)} \neq E$$

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \overline{R(A - \lambda I)} \neq E \right\}.$$

Le spectre de  $A$  est la réunion disjointe de  $\sigma_p(A)$ ,  $\sigma_c(A)$  et  $\sigma_r(A)$ .

On a donc

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

### Lemme 3.1.1

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés et  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , l'application  $A^*$  est injectif si et seulement si  $R(A)$  est dense dans  $F$ .

**Remarque 3.1.3**

$$1) \sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) \setminus \sigma_p(A).$$

**Preuve.**

Le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de  $A^*$ , mais n'est pas une valeur propre de  $A$ ; autrement dit  $A - \lambda I$  est injectif et  $(A - \lambda I)^*$  n'est pas injectif; d'après le lemme précédent cela se produit si et seulement si  $A - \lambda I$  est injectif mais n'a pas une image dense dans  $E$ . ■

**Remarques**

1. Si  $E$  est de dimension finie  $n$ , alors tout opérateur linéaire de  $E$  est continu et tout sous-espace vectoriel de  $E$  est fermé. Donc  $A - \lambda I$  est inversible si et seulement si  $A - \lambda I$  est injectif, si et seulement si  $A - \lambda I$  est surjectif. Le spectre résiduel est donc vide. Les valeurs spectrales de  $A$  sont donc les valeurs propres de  $A$ , et aussi les valeurs propres de la matrice  $U$  de  $A$  dans n'importe quelle base de  $E$ . Ce sont les ( $n$  en comptant avec multiplicité) racines complexes du polynôme caractéristique  $\det(A - XI) = \det(U - XI_n)$ , la multiplicité d'une valeur spectrale étant la multiplicité de la racine correspondante.
2. En particulier, si  $E$  est un espace de Banach complexe, alors un nombre complexe  $\lambda$  est une valeur propre d'un opérateur continu  $A$  si et seulement si  $A - \lambda I$  est bijectif, et cette remarque est souvent utile, et sera utilisée sans plus de commentaire dans la suite de ces notes.
3. Puisque bijectif implique injectif, toute valeur propre est une valeur spectrale

$$\sigma_p(A) \subset \sigma(A).$$

En dimension finie, nous venons de voir que cette inclusion est une égalité. Mais cette inclusion peut être stricte en dimension infinie.

4. Si l'image de  $A - \lambda I$  n'est pas dense, alors  $A - \lambda I$  n'est pas surjectif. Puisque bijectif implique surjectif, le spectre résiduel est donc contenu dans le spectre :

$$\sigma_r(A) \subset \sigma(A).$$

5. Pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C} - \{0\}$ , nous avons

$$\sigma(\lambda A) = \lambda \sigma(A), \sigma_r(\lambda A) = \lambda \sigma_r(A), \sigma_p(\lambda A) = \lambda \sigma_p(A), \sigma_c(\lambda A) = \lambda \sigma_c(A).$$

6. Le spectre discret n'est pas nécessairement un ensemble dénombrable. Quant au spectre continu, il peut revanche, être dénombrable et même fini

On a évidemment :

$$\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \mathbb{C}.$$

### 3.1.3 Spectre approximatif

Soit  $E$  un espace de Banach et  $A \in L(E)$ , on définit le spectre approximatif  $\sigma_a(A)$  de  $A$  par l'ensemble de tout les  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que il existe  $V$  un voisinage de 0 dans  $E$  tel que pour tout  $U$  voisinage de 0 il existe  $\nu \in V$  pour lequel :

$$(A - \lambda I)(\nu) \in U.$$

### 3.1.4 Rayon Spectral

#### Définition 3.1.3

On appelle rayon spectrale de  $A$  le nombre

$$r(A) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

#### Proposition 3.1.1

- la limite  $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$  existe et elle égale à  $\inf_{n \geq 1} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ .
- Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ , on a

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|.$$

#### Théorème 3.1.4

Soit  $A \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur linéaire continu et soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes,  $P(x) = \sum_0^n a_k x^k$ . Alors

1. Si  $A$  est inversible,

$$\sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1} = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

2. Le spectre de  $P(A)$  est

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)) = \{P(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}.$$

**Preuve.**

1. Soit  $\lambda \in \sigma(A^{-1})$ . Comme  $A^{-1}$  est inversible, nécessairement  $\lambda \neq 0$ . Comme  $A^{-1} - \lambda I$  est non inversible et comme,  $A^{-1} - \lambda I = \lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)^{-1}$ , l'opérateur  $(\frac{1}{\lambda}I - A)^{-1}$  est non inversible, i.e.  $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A)$ . On a donc montré que  $\sigma(A^{-1}) \subset \sigma(A)^{-1} := \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\}$ . En échangeant le rôle de  $A$  et  $A^{-1}$  on obtient l'inclusion réciproque  $\sigma(A)^{-1} \subset \sigma(A^{-1})$ , ce qui achève la preuve de la première assertion.

2. Montrons tout d'abord que  $P(\sigma(A)) \subset \sigma(P(A))$ . Soit  $\lambda \in \sigma(A)$ . Comme le polynôme  $P(X) - P(\lambda)$  s'annule en  $\lambda$ , il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X)$ , ce qui donne

$$P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I)Q(A).$$

Si  $P(A) - P(\lambda)I$  était inversible,  $(A - \lambda I)$  serait aussi inversible, d'inverse  $(P(A) - P(\lambda)I)^{-1}Q(A)$ , ce qui est contraire aux hypothèses. On obtient donc que  $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$ , montrant que  $P(\sigma(A)) \subset \sigma(P(A))$ .

Montrons ensuite que  $\sigma(P(A)) \subset P(\sigma(A))$ . Si  $P$  est constant, l'inclusion est trivialement vérifiée. On suppose donc dans la suite que  $P$  n'est pas un polynôme constant. Soit  $\lambda \in \sigma(P(A))$ . On factorise dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$ , où les  $\alpha_i, i = 1, \dots, n$  désignent les racines de  $P(X) - \lambda$ , et où  $\alpha \neq 0$  car  $P$  n'est pas constant. Si pour tout  $i = 1, \dots, n$  l'opérateur  $A - \alpha_i \lambda I$  est inversible,  $P(A) - \lambda I$  est aussi inversible, ce qui est absurde. Par conséquent il existe un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $A - \alpha_i \lambda I$  est inversible, i.e.  $\alpha_i \in \sigma(A)$ . On en déduit que  $\lambda = P(\alpha_i) \in P(\sigma(A))$ , prouvant que  $\sigma(P(A)) \subset P(\sigma(A))$ . ■

### 3.1.5 Exemples

#### Exemple 3.1.1

Déterminons le spectre de l'opérateur de translation défini sur  $l^2(\mathbb{N})$  par  $Ae_1 = 0$  et  $Ae_{n+1} = Ae_n$ . On peut vérifier facilement que  $\|A\| = 1$ , si bien que tout complexe  $\lambda$  de module strictement supérieur à 1, l'opérateur

$$\lambda I - A = \lambda \left( I - \frac{A}{\lambda} \right)$$

est inversible. Le spectre de  $A$  est donc inclus dans le disque unité fermé  $\overline{D(0,1)}$ . Nous allons démontrer qu'il est égal. On vérifie d'abord que pour tout  $\lambda$ ,  $|\lambda| < 1$ , l'élément  $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$  est dans  $l^2(\mathbb{N})$  et satisfait la relation  $Ax_\lambda - \lambda x_\lambda = 0$ , donc  $\lambda \in \sigma_p(A)$  et  $x_\lambda$  est un vecteur propre associé. On peut voir facilement que tout autre vecteur propre associé à  $\lambda$  est proportionnel à  $x_\lambda$ . Ainsi, on a montré l'inclusion de  $D(0,1)$ , dans  $\sigma_p(A)$  et, compte tenu de ce qui précède,  $\sigma(A) = \overline{D(0,1)}$ . Par ailleurs, si  $|\lambda| = 1$ , la solution  $x_\lambda$  de  $Ax = \lambda x$  n'appartient pas donc au spectre ponctuel; comme il est dans  $\sigma(A)$ , forcément l'opérateur  $A - \lambda I$  n'est pas surjectif. On peut d'ailleurs, vérifier que l'unique solution  $x = (x_1, x_2, \dots)$  de l'équation  $Ax - \lambda x = e_1$  est de la forme

$x = x_1 e_1 + (1 + \lambda x_1) e_2 + \lambda (1 + \lambda x_1) e_3 + \dots + \lambda^{n-2} (1 + \lambda x_1) e_n + \dots$ , et cet élément n'est pas dans  $l^2(\mathbb{N})$ .

#### Exemple 3.1.2

Sur l'espace de Hilbert  $L^2([0,1], dx)$ , on considère l'opérateur  $A$  :

$$Af(x) = xf(x), \text{ on a } \|A\| = 1 \text{ et donc } \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1\}.$$

Si  $\lambda$  est en dehors de l'intervalle  $[0,1]$ , la fonction  $x \mapsto (x - \lambda)^{-1}$  est bornée sur l'intervalle  $[0,1]$  est l'opérateur de multiplication par cette fonction est borné, c'est l'inverse de  $A - \lambda I$ . Donc  $\sigma(A) \subset [0,1]$ .

D'autre part, la relation  $Af - \lambda f = 0$  implique que  $f$  est nulle sauf éventuellement au point  $\lambda$ , l'opérateur  $A$  n'admet donc pas de valeur propre ( $\sigma_p(A) = \emptyset$ ). En fin, pour tout  $\lambda \in [0,1]$ , l'opérateur  $A - \lambda I$  n'est pas surjectif, puisque l'unique solution de l'équation  $Af - \lambda f = 1$  est la fonction  $(x - \lambda)^{-1}$  qui n'appartient pas à  $L^2([0,1])$ .

En conclusion

$$\sigma_p(A) = \emptyset \text{ et } \sigma(A) = [0, 1].$$

**Exemple 3.1.3**

Soit  $l^2(\mathbb{N})$  l'espace de Hilbert des suite  $X = (x_n)$  des nombres complexes vérifiant

$$\sum_{n=0}^n |x_n|^2 < \infty$$

Soit  $D$  un compact de  $\mathbb{C}$  et soit  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  une suite dense dans  $D$ . On désigne par  $A$  l'opérateur de multiplication par la suite  $(\lambda_k)$ :

$$X = (x_n) \in l^2(\mathbb{N}) \mapsto AX = (\lambda_n x_n).$$

On remarque d'abord que, la suite  $(\lambda_n)$  étant bornée, l'opérateur  $A$  est un endomorphisme continue de  $l^2(\mathbb{N})$ . D'autre part, pour tout  $n$ ,  $\lambda_n$  appartient à  $\sigma_p(A)$  puisque  $Ae_n = \lambda_n e_n$ . Comme le spectre de  $A$  est fermé, on en déduit que  $D \subset \sigma(A)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus D$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $|\lambda - \lambda_k| > \alpha, \forall k$ .

La suite  $((\lambda - \lambda_n)^{-1})$  est bornée et l'opérateur de multiplication par cette suite est donc borné, c'est l'inverse de  $A - \lambda I$ . Ainsi, un tel  $\lambda$  appartient à  $\rho(A)$  et donc le spectre de  $A$  est inclus dans  $D$ .

Finalement, on a les égalités

$$\sigma(A) = D \text{ et } \sigma_p(A) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}.$$



### 3.1.6 Valeurs et espaces propres d'un opérateur auto-adjoint

Certaines propriétés, connues pour les matrices hermitiennes, en particulier pour les matrices réelles symétriques, restent valable pour un opérateur auto-adjoint  $A$  défini sur un espace de dimension infinie.

#### Existence de valeurs propres

##### Proposition 3.1.2

*Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint, en cas d'existence, les valeurs propres de  $A$  sont réels et les espaces propres relatifs à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

**Preuve.**

$A$  auto-adjoint:  $A = A^* \Leftrightarrow \forall x, y \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

1) Si  $Ax = \lambda x$  avec  $\|x\| = 1$ ,  $\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$  et  $\langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$

D'où

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

2) Si  $Ax = \lambda x$  et  $Ay = \mu y$  avec  $\|x\| = \|y\| = 1$  et  $\lambda \neq \mu$ ,

$\langle Ax, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  et  $\langle x, Ay \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle$  les valeurs  $\lambda$  et  $\mu$  sont réelles. Donc comme  $A$  est hermitien ( auto-adjoint), on a

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme  $\lambda \neq \mu$ , on en déduit  $\langle x, y \rangle = 0$ . ■

##### Théorème 3.1.5

*Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint. On pose  $m = \inf_{x \in H, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ ,  $M = \sup_{x \in H, \|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ .*

*Alors*

$$\sigma(A) \subset [m, M], m \in \sigma(A), M \in \sigma(A).$$

**Preuve.**

- Soit  $\lambda > M$ . On définit la forme bilinéaire continue (symétrique)

$a_\lambda(x, y) = \langle \lambda x - Ax, y \rangle$ . Alors, avec  $\alpha = \lambda - M > 0$ , on a

$$\forall x \in H \quad a(x, x) = \lambda |x|^2 - M |x|^2 \geq \alpha |x|^2,$$

et donc  $a_\lambda$  est coercive. Appliquant le théorème de **Lax-Milgram** on voit que

$\forall f \in H, \exists! x \in H$  tel que

$$\langle \lambda x - Ax, y \rangle = \langle f, y \rangle \quad \forall y \in H$$

de sorte que  $\lambda x - Ax = f$ . Cela prouve que  $\lambda \in \rho(A)$ , i.e.  $]M, \infty[ \subset \rho(A)$ .

• Montrons que  $M \in \sigma(A)$ . La forme  $a_M$  est bilinéaire symétrique et positive:  $a(y, y) \geq 0$  pour tout  $y \in H$ .

Elle vérifie donc une inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'écrit

$$|\langle Mx - Ax, y \rangle| \leq \sqrt{\langle Mx - Ax, x \rangle} \sqrt{\langle My - Ay, y \rangle} \leq C \sqrt{\langle Mx - Ax, x \rangle} |y| \quad \forall x, y \in H.$$

Il en résulte que

$$|Mx - Ax| \leq C \sqrt{\langle Mx - Ax, x \rangle} \quad \forall x \in H. \quad (3.1.2)$$

Soit maintenant une suite  $(x_n)$  telle que  $|x_n| = 1$  et  $\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow M$ . De 3.1.2 on déduit que  $|Mx_n - Ax_n| \rightarrow 0$ .

Si on avait  $M \in \rho(A)$  on aurait  $u_n = (M - A)^{-1} (Mx_n - Ax_n) \rightarrow 0$  ce qui serait absurde. Donc  $M \notin \rho(A)$ .

• Les propriétés de  $m$  s'obtiennent en remplaçant  $A$  par  $-A$ . ■

### Théorème 3.1.6

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint tel que  $\sigma(A) = \{0\}$ . Alors  $A = 0$ .

**Preuve.**

Du théorème 3.1.5 on sait que  $\langle Ax, x \rangle = 0$  pour tout  $x \in H$ . On en déduit puisque  $A$  est symétrique  $2 \langle Ax, x \rangle = \langle A(x + y), x + y \rangle - \langle Ax, x \rangle - \langle Ay, y \rangle = 0$  pour tout  $x, y \in H$ . Donc  $A = 0$ . ■

### Rayon spectral d'un opérateur auto-adjoint

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint, Alors

$$r(A) = \|A\|$$

**Preuve.**

Comme la suite  $\|A^*\|^{\frac{1}{n}}$  converge vers  $r(A)$ , il nous suffit de montrer qu'un de ses sous-suite converge vers  $\|A\|$  pour prouver l'égalité. D'un part

$$\|A^*A\| = \sup_{\|x\|=1} \langle A^*Ax, x \rangle = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2,$$

d'autre part  $A$  auto-adjoint et donc  $\|A^*A\| = \|A\|^2$ . D'où, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$ . Il suit

$$\|A\| = \|A^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \rightarrow r(A),$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . ■

Dans le cas général d'un opérateur  $A$  non nécessairement auto-adjoint, on a des liens naturels entre le spectre de  $A$  et celui de  $A^*$ .

**Proposition 3.1.3**

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ ,

1.  $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$ ,
2. pour  $\lambda \in \rho(A)$ , on a  $(R_\lambda(A))^* = R_{\bar{\lambda}}(A^*)$ ,
3.  $\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ ,
4.  $\lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$ ,
5.  $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ .

**Théorème 3.1.7**

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint, alors  $\sigma_r(A) = \emptyset$ .

**Preuve.**

On déduit facilement que  $\sigma_r(A) = \emptyset$ , en effet, soit  $\lambda \in \sigma_r(A)$ , alors

$$\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}.$$

On a donc  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , ce qui absurde car  $\sigma_p(A)$  et  $\sigma_r(A)$  sont disjoints. Donc

$$\sigma_r(A) = \emptyset.$$

■

## 3.2 Spectre D'un Opérateur Compact

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur compact dans  $H$ . On sait que si  $H$  n'est pas de dimension finie,  $\lambda = 0$  est toujours dans le spectre de  $A$ , sinon, l'opérateur  $I = AA^{-1}$  serait compact.

### 3.2.1 Propriétés

#### Corollaire 3.2.1

*Soit  $(e_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , une suite orthonormée dans  $H$ , si  $A$  un opérateur compact alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ae_n\| = 0.$$

#### Proposition 3.2.1

*Soit  $A$  un opérateur compact, si  $A - \lambda I$  est surjectif il est injectif.*

**Preuve.**

Supposons qu'il existe  $x_1 \neq 0$  tel que  $Ax_1 = \lambda x_1$ , posons  $B = A - \lambda I$  on a  $Bx_1 = 0$ , on a aussi

$$\ker(B) \subset \ker(B^2) \subset \dots \ker(B^n) \subset \dots$$

Et chacun de ces sous espaces est fermé. Nous allons montrer que ces inclusions sont toutes strictes en effet, puisque  $B$  est surjectif il existe  $x_2$  tel que  $Bx_2 = x_1$ , il existe  $x_3$  tel que  $Bx_3 = x_2$ .. par induction on construit une suite  $(x_n)$  tel que  $Bx_{n+1} = x_n$  et  $x_n \neq 0$  puisque  $x_1 \neq 0$ . D'autre part  $x_n \in \ker(B^n)$ , car

$$B^n x_n = B^{n-1}(Bx_n) = B^{n-1}(x_{n-1}) = \dots = Bx_1 = 0.$$

Mais  $x_n \notin \ker(B^{n-1})$  car  $B^{n-1} x_n = \dots = Bx_2 = x_1 \neq 0$ .

Donc  $\ker(B^{n-1})$  est strictement inclus dans  $\ker(B^n)$ , choisissons pour tout  $n \geq 1$ , un vecteur unitaire  $e_n$  appartenant à  $\ker(B^n)$  et orthogonal à  $\ker(B^{n-1})$  comme  $Be_n$  appartient à  $\ker(B^{n-1})$ , on a

$$\|Ae_n\|^2 = \|Be_n + \lambda e_n\|^2 = \|Be_n\|^2 + |\lambda|^2 \geq |\lambda|^2$$

Ainsi que  $(e_n)$ ,  $n \geq 1$  est une suite orthonormée, dont l'image  $(Ae_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ne converge pas vers 0, ce qui est impossible d'après le corollaire. ■

### Théorème 3.2.1

Soit  $A$  un opérateur compact si  $A - \lambda I$  est injectif alors son image est fermée dans  $E$ .

**Preuve.**

Soient  $y \in \overline{R(A - \lambda I)}$  et  $(y_n)$  une suite de  $R(A - \lambda I)$  qui converge vers  $y$ . On pose

$$y_n = Ax_n - \lambda x_n$$

- Si  $(x_n)$  contient une sous-suite bornée, alors  $A$  étant compact,  $(x_n)$  contient aussi une sous-suite  $(x_{n_k})$  telle que  $(Ax_{n_k})$  converge. Comme

$$x_{n_k} = \frac{Ax_{n_k} - y_{n_k}}{\lambda}.$$

La suite  $(x_{n_k})$  converge vers un élément  $x$  qui vérifie  $Ax - \lambda x = y$ .

- Si  $(x_n)$  ne contient aucune sous-suite bornée, la suite  $\|x_n\|$  tend vers l'infini avec  $n$ .

Posons  $z_n = \|x_n\|^{-1} x_n$ , il vient:

$$\|z_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)z_n = 0.$$

Comme  $A$  est compact,  $(z_n)$  contient une sous suite  $(z_{n_k})$  telle que  $(Az_{n_k})$  converge.

On en déduit que la suite  $(z_{n_k})$  est convergente et si  $z$  est sa limite, on aura  $\|z\| = 1$  et  $Az - \lambda z = 0$  ce qui contredit l'hypothèse  $A - \lambda I$  est injectif. ■

### Corollaire 3.2.2

Si  $A$  est un opérateur linéaire compact sur un espace de Hilbert  $H$  et  $\lambda$  est une valeur propre non nulle de  $A$  alors

Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $E_\lambda = \ker((A - \lambda I)^n)$  est de dimension finie.

**Preuve.**

En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^n &= A^n - \binom{n}{1} \lambda A^{n-1} + \binom{n}{2} \lambda^2 A^{n-2} + \dots + (-1)^n \lambda^n I \\ &= AB + (-1)^n \lambda^n I. \end{aligned}$$

Où  $B$  est un opérateur borné et le théorème précédent permet alors de conclure. ■

**Théorème 3.2.2**

Soit  $A$  un opérateur compact. Si  $(\lambda_n)$  est une suite des valeurs propres de  $A$  alors cette suite finie, ou bien elle tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

**Preuve.**

Supposons que la suite  $(\lambda_n)$  ne tend pas vers 0. Il existe alors  $\varepsilon > 0$  et une sous-suite  $(\lambda_{n_k})$  satisfaisant  $|\lambda_{n_k}| \geq \varepsilon$  pour simplifier les notations, on peut supposer que  $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ .

Soit, pour tout  $k \geq 1$ ,  $x_k$  un vecteur propre associé à  $\lambda_k$  et soit  $N_k$  le sous-espace engendré par  $\{x_1, x_2 \dots x_k\}$ , la suite  $(N_k)$  est strictement croissante, pour le voir, il suffit de montrer que, pour tout  $k$ ,  $\{x_1, x_2 \dots x_k\}$  est une famille libre. Supposons donc que  $\{x_1, x_2 \dots x_{k-1}\}$  soit libre et que  $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ , il vient :

$$0 = (A - \lambda_k I) x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (A - \lambda_i I) x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k I) x_i.$$

Comme  $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$  pour tout  $i \leq k-1$ , on a nécessairement  $\alpha_i = 0$ .

$\forall i \leq k-1$  et donc  $x_k = 0$ , ce qui absurde, on peut donc choisir pour tout  $k \geq 1$ , un élément  $e_k$  de  $N_k$  de norme 1 et orthogonal à  $N_{k-1}$  les vecteur  $e_k$  et  $(A - \lambda_k I) e_k$  sont alors orthogonaux car  $(A - \lambda_k I) N_k \subset N_{k-1}$  on en déduit que:

$$\begin{aligned} \|Ae_k\|^2 &= \|(A - \lambda_k I)e_k + \lambda_k e_k\|^2 \\ &= \|(A - \lambda_k I)e_k\|^2 + |\lambda_k|^2 \end{aligned}$$

mais cela contredit le fait que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ae_k\| = 0$ . ■

**Lemme 3.2.1**

Soit  $K$  un opérateur compact. Posons  $A = I - K$ . Soit  $M \subset E$  un sous espace fermé tel que  $A|_M$  est injectif. Alors il existe  $c > 0$  tel que  $\|Ax\| \geq c\|x\|$  pour tout  $x$  dans  $M$ , et donc  $A(M)$  est un sous espace fermé.

**Preuve.**

Si non, il existerait une suite  $(x_n)$  dans  $M$  avec  $\|x_n\| = 1$  et  $A(x_n) \rightarrow 0$  comme  $K$  est compact. quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que  $(Kx_n)$  converge, mais comme  $I = A + K$ , la suite  $(x_n)$  converge aussi, soit  $x \in M$  sa limite on obtient  $Ax = 0$  ce qui contredit l'hypothèse.

Pour démontrer que  $A(M)$  est fermé, soit  $(y_n)$  une suite dans  $M$  telle que  $(Ay_n)$  converge.

L'inégalité démontrée précédemment implique que  $(y_n)$  est aussi de Cauchy, donc converge. Si on note  $y$  sa limite, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ay_n = Ay \in A(M).$$

■

### Théorème 3.2.3

Soit  $A$  un opérateur compact de l'espace de Hilbert  $H$  dans  $H$ ,  $\sigma(A)$  est aussi compact dans  $\mathbb{C}$ .

**Preuve.**

Soit  $\lambda$  telle que  $|\lambda| > \|A\|$ . Montrons que  $A - \lambda I$  est bijectif. Soit  $f \in E$  et l'équation  $Au - \lambda u = f$ . l'application  $\frac{A-f}{\lambda}$  est contractante d'après du le théorème de point fixe de Banach, elle admet un unique point fixe qui est exactement la solution cherchée.

On en déduit donc  $\sigma(A) \subset D(0, \|A\|)$ . Il reste à monter que le spectre est un fermé.

Montrons que son complémentaire est un ouvert. Soit  $\lambda_0 \in \rho(A)$  montrons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  telque  $B(\lambda_0, \varepsilon) \subset \rho(A)$ . Soit à résoudre  $Au - \lambda u = f$ , cette équation s'écrit

$$Au - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0) u$$

elle admet une solution  $u$  qui s'écrit:

$$u = (A - \lambda_0 I)^{-1} (f + ((\lambda - \lambda_0) u)) = (\lambda - \lambda_0) (A - \lambda I)^{-1} \left( \frac{f}{\lambda - \lambda_0} + u \right)$$

Soit l'application qui  $u$  associe  $(\lambda - \lambda_0) (A - \lambda I)^{-1} \left( \frac{f}{\lambda - \lambda_0} + u \right)$

Si  $\|(\lambda - \lambda_0) (A - \lambda I)^{-1}\| < 1$ , le théorème du point fixe de Banach permet encore de conclure à l'existence et unicité de la solution. Il suffit donc de choisir

$$\varepsilon \leq \frac{1}{\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|}.$$

■

**Proposition 3.2.2**

Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite de complexes tous distincts telle que  $(\lambda_n) \subset \sigma(A) \setminus \{0\}$ , s'il existe  $\lambda$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = \lambda$ , alors  $\lambda = 0$ .

**Preuve.**

On sait que les  $\lambda_n$  sont des valeurs propres de  $A$  et il existe  $\phi_n \in H$  telles que  $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ , soit  $E_n = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$

Comme les fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendantes, on a  $E_n \subsetneq E_{n+1}$ , on construit une suite  $(u_n)$  telle que  $u_n \in E_n$ ,  $\|u_n\| = 1$  et  $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ .

Pour tout  $n \geq 2$ . Soit  $2 < m < n$  de sorte que

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$$

On a :

$$\left\| \frac{Au_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{Au_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Au_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \geq d(u_n, E) \geq \frac{1}{2}.$$

Comme  $A$  est compact et que la suite  $(u_n)$  est bornée, on peut extraire de la suite  $(Au_n)$  une sous-suite convergente. Si la suite  $(\lambda_n)$  converge vers  $\lambda \neq 0$ , la suite  $\left(\frac{Au_n}{\lambda_n}\right)_n$  admettra une sous-suite convergente, ce que l'estimation au-dessus rend impossible. Donc  $\lambda = 0$ . ■

**Théorème 3.2.4**

Soit  $A$  un opérateur compact dans l'espace de Hilbert  $H$  dans  $H$  alors  $\sigma(A) \setminus \{0\}$  est l'ensemble des éléments d'une suite dans  $\mathbb{C}$ , tend vers 0. i.e.

On peut écrire  $\sigma(A) \setminus \{0\}$  sous la forme suivante:

$$\sigma(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

**Preuve.**

On choisit un vecteur propre  $\varphi_n$  associé à chaque valeur propre  $\lambda_n$ . La suite  $(\varphi_n)$  n'a pas besoin être orthonormée, mais nous pouvons obtenir une suite orthonormée  $(\psi_n)$  par le processus de Gram-Schmidt, alors  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :



$\psi_1$  est un combinaison linéaire de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , aussi  $\varphi_n$  est une combinaison linéaire de  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , ce qui implique que  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \alpha_n \neq 0$  pour lequel

$$\psi_n = \alpha_n \varphi_n + \text{combinaison linéaire de } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$$

et puisque

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\begin{aligned} A\psi_n &= \alpha_n \lambda_n \varphi_n + \text{combinaison linéaire de } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \\ &= \lambda_n \psi_n + \text{combinaison linéaire de } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \\ &= \lambda_n \psi_n + \text{combinaison linéaire de } \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1} \end{aligned}$$

Alors  $\langle A\psi_n, \psi_n \rangle = \lambda_n$ , puisque  $(\psi_n)$  est une suite orthonormée, et il ressort du lemme (2.1.1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A\psi_n, \psi_n \rangle = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n.$$

Ce qui résulte désiré. ■

### 3.2.2 Théorème Principale de F.Riesz, 1918

Soit  $A$  un opérateur compact dans espace de Hilbert  $H$ , alors

1. Le spectre de  $A$  est au plus dénombrable. Chaque point du spectre est isolé, à l'exception possible de 0.
2. Si l'espace  $E$  est de dimension infinie alors 0 appartient au spectre de  $A$ , (en dimension finie, bien sûr ce n'est plus vrai, sinon tout opérateur en dimension finie aurait 0 dans son spectre).
3. Tout complexe non nul du spectre de  $A$  est une valeur propre de l'espace propre correspondant est de dimension finie c'est-à-dire

$$\forall \lambda \neq 0 : \sigma(A) = \{0\} \cup \sigma_p(A), \quad E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$$

est de dimension finie.

**Preuve.**

1. Puisque  $\sigma(A)$  est compact, il suffit de montrer que tout  $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$  est isolé. Or, si un tel  $\lambda$  n'est pas isolé, il existerait une suite  $(\lambda_k)$ , d'éléments dans  $\sigma(A)$  non nuls et distincts deux à deux, qui convergerait vers  $\lambda$ . Comme  $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ , les  $\lambda_k$  sont les valeurs propres et le théorème 3.2.4 dit que nécessairement  $(\lambda_k)$  converge vers 0, ce qui contredit l'hypothèse  $\lambda \neq 0$ .
2. Si  $0 \notin \sigma(A)$ , i.e. si  $0 \in \rho(A)$ , alors  $A$  est inversible dans  $\mathcal{L}(H)$  et  $A \circ A^{-1} = I$  est compact car  $A$  l'est et  $A^{-1}$  est continu: en effet  $A^{-1}(B)$  est borné car  $A^{-1}$  est continu, donc  $A(A^{-1}(B))$  est relativement compact car  $A$  est compact. Mais  $I$  n'est compact que si  $H$  est de dimension finie. Donc  $0 \notin \rho(A)$  pour  $H$  de dimension infinie.

Le spectre d'un opérateur compact non nul, peut être réduit à  $\{0\}$ .

3. Pour montrer que l'espace propre  $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ , avec  $\lambda \neq 0$  est de dimension finie, il suffit de vérifier que la boule unité de  $E_\lambda$  est compacte et pour cela montrer que toute suite de  $B \cap E_\lambda$  on peut extraire une suite convergente. Soit donc une suite quelconque  $(v_n) \subset B \cap E_\lambda$ .

Nous avons  $\|v_n\| \leq 1$  et  $A$  est compact donc il existe une suite  $(v_{n_p})$  extraite de  $(v_n)$  telle que la suite  $(Av_{n_p})$  converge.

Mais comme  $v_{n_p} \in E_\lambda$ ,  $Av_{n_p} = \lambda v_{n_p}$  avec  $\lambda \neq 0$ . Alors  $v_{n_p} = \frac{1}{\lambda} Av_{n_p}$ , et la suite  $(v_{n_p})$  converge. ■

### 3.2.3 Théorie de Fredholm

Etudier le spectre d'un opérateur compacte  $A$  signifie étudier les valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  pour lesquelles l'opérateur  $\lambda^{-1}A - I$  est bijectif (le cas  $\lambda = 0$  est particulier, comme on le verra avec le théorème de **F. Riesz**). Il s'agit donc de savoir, si pour  $A$  opérateur compact quelconque, l'équation

$$(A - I)x = y.$$

Admet une unique solution pour tout  $y \in H$ . **La théorie de Fredholm** établit que si on peut assurer l'unicité, alors l'existence suit. C'est le résultat appelé "**alternative de Fredholm**".

### Théorème alternative de Fredholm

Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, alors l'une des deux propriétés suivantes est réalisée:

1. Il existe  $x_0 \in H$  tel que  $x_0 \neq 0$  et  $(A - I)x_0 = 0$  i.e.  $1 \in \sigma_p(A)$ .
2. Pour tout  $y \in H$ , il existe un unique  $x \in H$  tel que  $(A - I)x = y$ ,  $A - I$  est un isomorphisme de  $H$ .

#### Remarque 3.2.1

Quel est le lien entre l'alternative de Fredholm et la description intuitive que nous en avons faite avant de l'énoncer? Tout d'abord on remarque qu'au lieu d'écrire l'alternative en distinguant les deux cas  $1 \in \sigma_p(A)$  et  $1 \notin \sigma(A)$ . on aurait pu distinguer, pour n'importe quel  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  les cas  $\lambda \in \sigma_p(A)$  et  $\lambda \notin \sigma(A)$ . En effet, pour  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$A - \lambda I = \lambda \left( \frac{A}{\lambda} - I \right).$$

On pose  $\hat{A} = \frac{1}{\lambda}A$ ,  $\hat{A}$  est compact. Distinguer les cas  $1 \in \sigma_p(\hat{A})$  et  $1 \notin \sigma(\hat{A})$  est équivalent à distinguer  $\lambda \in \sigma_p(A)$  et  $\lambda \notin \sigma(A)$ . On voit alors que dans le premier cas ( $1 \in \sigma_p(\hat{A})$ , c'est-à-dire  $\lambda \in \sigma_p(A)$ ), le noyau de  $A - \lambda I$  est non réduit à  $\{0\}$  donc il existe une infinité de  $x \in H$  (les éléments de  $\ker(A - \lambda I)$ ) tels que  $(A - \lambda I)x = 0$ . Maintenant, pour  $y \in H$ , on considère l'équation

$$(A - \lambda I)x = y \tag{3.2.1}$$

On voit que si pour  $y \in H$  donné, l'équation  $(A - \lambda I)x = y$ , admet une solution, alors elle en admet une infinité. Autrement dit dans le premier cas, on n'a pas l'unicité. Si on est dans le second cas, alors on a l'existence et l'unicité de la solution pour tout  $y \in H$ . Car  $A - \lambda I$  est bijective. On voit que si on peut montrer l'unicité, alors on n'est forcément pas dans le premier cas et on est donc dans le second, c'est-à-dire qu'on a l'existence et l'unicité. Ainsi si on peut assurer l'unicité des solution de 3.2.1, alors on a nécessairement existence.

### 3.2.4 Etude spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint

Un opérateur compact peut n'avoir aucune valeur propre et il est de même d'un opérateur borné auto-adjoint. Mais un opérateur à la fois compact et auto-adjoint possède des valeurs propres. Ce type d'opérateur généralise en dimension infinie, lequel est diagonalisable dans une base orthonormale.

#### Rappel

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur auto-adjoint dans  $\mathcal{L}(H)$ . On sait que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

#### Théorème 3.2.5

Si  $A$  est un opérateur compact auto-adjoint, alors il admet une valeur propre  $\lambda$  telle que

$$|\lambda| = \|A\|.$$

#### Preuve.

Posons  $a = \|A\|$ . On a

$$a = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle \text{ ou bien } -a = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle.$$

En considérant, si nécessaire,  $-A$  à la place de  $A$ , on peut toujours supposer  $a = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$

Il existe alors, une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $H$ , telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Ax_n, x_n \rangle = a$$

L'opérateur  $A$  étant compact, on peut extraire une sous suite  $(x_{n_k})$  dont l'image par  $A$  est convergente. Posons

$$y = \lim_{k \rightarrow +\infty} Ax_{n_k}$$

On a bien sûr,  $\|y\| \leq a$ . Montrons que  $Ay = ay$ . En effet

$$\|Ax_{n_k} - ax_{n_k}\|^2 = \|Ax_{n_k}\|^2 + a^2 - 2a\Re\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle$$

Comme  $A$  est auto-adjoint  $\Re\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle = \langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle$ ; en faisant tendre  $k$  vers l'infini dans ce qui précède, il vient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k} - ax_{n_k}\|^2 = \|y\|^2 + a^2 - 2a^2 = \|y\|^2 - a^2 \leq 0$$

on a donc, en fait, l'égalité

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Ax_{n_k} - ax_{n_k}\|^2 = 0.$$

L'opérateur  $A$  étant continu, on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(Ax_{n_k} - ax_{n_k}) = 0.$$

C'est-à-dire que  $Ay - ay = 0$ , ce qui est le résultat désiré. ■

En dimension finie, il est bien connu que tout endomorphisme symétrique admet une base orthonormale de vecteurs propres. En dimension infinie, ce théorème fondamental se généralise aux opérateurs auto-adjoints compacts comme suit :

### **Théorème 3.2.6**

*Soit  $H$  un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie, et  $A$  opérateur auto-adjoint compact sur  $H$ . Alors  $H$  admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de  $A$ .*

**Preuve.**

Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  la suite des valeurs propres distinctes de  $A$ , excepté 0; on note  $\lambda_0 = 0$ .

On pose

$$E_0 = \ker(A) \quad \text{et} \quad E_n = \ker(A - \lambda_n I);$$

Rappelons que

$$0 \leq \dim E_0 \leq \infty \quad \text{et} \quad 0 \leq \dim E_n \leq \infty.$$

Montrons d'abord que  $H$  est somme Hilbertienne des  $(E_n)_{n \geq 0}$  :

(i) Les  $(E_n)_{n \geq 0}$  sont deux à deux orthogonaux. En effet si  $u \in E_m$  et  $v \in E_n$  avec  $m \neq n$

Alors

$$Au = \lambda_m u \quad Av = \lambda_n v$$

et

$$\langle Au, v \rangle = \lambda_m \langle u, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \lambda_n \langle u, v \rangle.$$

Donc

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

(ii) Soit  $F$  l'espace vectoriel engendré par les  $(E_n)_{n \geq 0}$ . Vérifions que  $F$  est dense dans  $H$ .

Il est clair que  $A(F) \subset F$ . Il s'en suit que  $A(F^\perp) \subset F^\perp$ ; en effet si  $u \in F^\perp$  et  $v \in F$ , alors  $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = 0$ . L'opérateur  $A_0 = A|_{F^\perp}$  est auto-adjoint compact. D'autre part  $\sigma(A_0) = \{0\}$

en effet si

$$\lambda \in \sigma(A_0) \setminus \{0\}, \text{ alors } \lambda \in \sigma_p(A_0).$$

et donc il existe  $u \in F^\perp$ ,  $u \neq 0$  tel que

$$A_0 u = \lambda u.$$

Par conséquent  $\lambda_n$  de  $A$  et  $u \in F^\perp \cap E$ . Donc  $u = 0$ , ce qui est absurde.

Il résulte du théorème 3.1.6 que  $A_0 = 0$ , par suite

$$F^\perp \subset \ker(A) \subset F \text{ et } F^\perp = \{0\}.$$

Donc  $F$  est dense dans  $H$ .

Enfin on choisit dans chaque  $E_n$  une base Hilbertienne. la réunion de ces bases est une base Hilbertienne de  $H$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

On sait par ailleurs que chaque sous-espace propre correspondant a une valeur propre non nulle est de dimension finie, donc possède une base orthonormale. Si 0 est valeur propre, l'espace  $E_0$  est ou bien de dimension finie et donc admet une base orthonormale, ou bien Hilbert séparable (car s.e.v. fermé de  $H$  Hilbert séparable) donc admet une base hilbertienne. Pour construire une base hilbertienne de  $H$  constituée de vecteurs propres de  $A$ , il suffit donc de considérer la réunion (au plus dénombrable) des bases orthonormales (ou hilbertiennes) de tous les sous-espaces propres de  $A$ . ■

### 3.2.5 Théorème spectral (opérateurs compacts auto-adjoints)

**Théorème 3.2.7** (voir[Boc, 84])

*Si  $A$  est un opérateur linéaire compact auto-adjoint défini dans un espace de Hilbert  $E$  et  $(\lambda_n)$  la suite, finie ou infinie, de ses valeurs propres, on a :*

$$A = \sum_n \lambda_n P_{E_{\lambda_n}}, \quad (3.2.2)$$

où  $P_{E_{\lambda_n}}$  est l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace de dimension finie

$$E_{\lambda_n} = \ker (A - \lambda_n I)$$

et

$$E = E_0 \oplus E_{\lambda_n} \quad \text{où} \quad E_0 = \ker(A) \quad (3.2.3)$$

La relation 3.2.2 est la représentation spectrale de  $A$  et 3.2.3 la décomposition spectrale de  $E$ .

### Remarque 3.2.2

Si  $A$  et  $B$  deux opérateurs compacts auto-adjoints tels que  $AB = BA$ , ils sont même décomposition spectrale. En effet, si  $x_n \in E_{\lambda_n}$  on a  $Ax_n = \lambda_n x_n$  et  $ABx_n = BAx_n$ ; ce qui montre que  $Bx_n \in E_{\lambda_n}$ .

# Conclusion générale

Dans ce mémoire on a étudié le spectre des opérateurs compacts.

On a commencé par rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail

Le deuxième chapitre présente une introduction d'ensemble compact, et on a fait une étude sur les opérateurs compacts.

Dans le troisième chapitre on fait une étude sur le spectre des opérateurs linéaires compacts et auto-adjoints compacts.



# Bibliographie

- [Boc, 84] N.BOCCARA. *Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens*, MARKETING, Paris,1984.
- [Bre, 92] H.BREZIS.*Analyse fonctionnelle,théorie et application*, MASSON Paris 1992.
- [Che, 01] H.CHEBLI. *Analyse Hilbertienne*, Tunis 2001.
- [Dri, 03] B.K.DRIVER, *Analysis tools with applications*, Berlin, New York, Paris, june 2003
- [ET, 98 ] J.ETIENNE, P.TOSSINGS. *Analyse fonctionnelle appliquée*, Université de Liege,1998.
- [Fri, 10] .E.FRICAÏN. *Analyse Fonctionnelle et théorie des opérateurs, cours et exercices*, Master(mathématiques peres), 2009-2010.
- [GJ, 10] J.M.GILSINGER, M.JAI. *Éléments d'analyse fonctionnelle, Fondements et applications aux sciense de l'ingenieur*, Presses polytechniques et universitaires Romandes 2010.
- [HLR, 81] W.HENGARTNER, M.LAMBERT, C.RIESCHER. *Introduction à l'analyse fonctionnelle*, Canada 1981..
- [Khe, oo] Y.KHELOUFI , *Sur la théorie de l'alternative de fredholm*, mémoire magister, université Mohamed Boudiaf de M'Sila.
- [Mil, 99] V.MILMAN, *An introduction to Functional analysis*, World 1999.
- [Nad, 04] M. NADIR. *Cours d'analyse fonctionnelle*. Université de M'sila, Algérie, 2004.

- [RS, 79] M.REED, B.SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, New York, London, 1980.
- [Sch, 79] L. SCHWARTZ. *Analyse hilbertinne*. Hermann. 1979.
- [Sma, 12] A.SMATI. *Relations entre opérateurs compacts et opérateurs normaux*, mémoire de master université de M'sila, 2012